

Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 2ºP/2013 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 2 - teste na sexta, 04/10

1. Considere um foguete de massa total inicial m_0 , lançado verticalmente. Seu motor fornece uma força de impulso estática $T = -v_e \dot{m}$, onde $-\dot{m} = \mu > 0$ é suposto constante e v_e é (o módulo da) velocidade de emissão dos propelentes com respeito ao foguete.

a) Vimos que, se $g = 0$, a velocidade do foguete evolui segundo a eq. de Tsiolkovsky. Usando um raciocínio análogo mostre que, no caso $g \neq 0$, a evolução da velocidade e da posição vertical do foguete podem ser escritos respectivamente como

$$v(t) = v_e \left(\ln \frac{1}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right), \quad z(t) = \frac{v_e^2}{g\alpha} \left(\gamma - (1-\gamma) \ln \frac{1}{(1-\gamma)} - \frac{\gamma^2}{2\alpha} \right)$$

onde $\gamma(t) \equiv \mu t/m_0$ é a fração da massa inicial perdida até o instante de interesse, e $\alpha \equiv \frac{T}{m_0 g}$ é a razão entre a força de impulso estático do foguete e seu peso no momento do lançamento.

b) O foguete Saturno 5, usado para lançar as naves Apolo para a Lua, tinha as seguintes especificações (fonte: Wikipédia): massa total no solo: 2800T. Massa do 1º estágio: 2300T, dos quais 131T de ‘casco’ e o restante de combustível; $v_e = 2600\text{m/s}$; $T = 34 \times 10^6\text{N}$.

Estime a velocidade e altura alcançadas ao final da queima do combustível do 1º estágio. O quanto as suas estimativas mudariam se não levassem em conta o fato de que $g \neq 0$?

Compare seus resultados com os dados reais, disponíveis em

http://en.wikipedia.org/wiki/Saturn_V#S-IC_first_stage

Obs: note que nossa análise ainda não leva em conta vários detalhes importantes, incluindo o atrito e a pressão do ar, e especialmente o fato de que o foguete real era lançado numa trajetória inclinada em relação à vertical.

2. Uma “transformação de calibre” dos potenciais escalar (ϕ) e vetor ($\mathbf{A}$) do eletromagnetismo é definida por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

onde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária.

- a) O que ocorre com os campos elétrico $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ e magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ sob essa transformação?
- b) De que maneira a Lagrangeana de uma partícula se movendo sobre a ação destes potenciais é afetada por essa transformação? As equações de movimento são ou não alteradas?
3. Para um oscilador harmônico de massa m e frequência angular ω , seja $x_f(t)$ uma solução da eq. de movimento entre $t_0 = 0$ e t_1 , e $x(t) = x_f(t) + \eta(t)$, com $\eta(0) = \eta(t_1) = 0$, uma outra trajetória próxima com mesmo ponto inicial e final. Vamos verificar explicitamente que a ação é extremalizada pela trajetória física $x_f(t)$, como prevê o princípio de Hamilton.

a) Mostre que $S[x] = S[x_f] - \frac{m}{2} \int_0^{t_1} (\eta \ddot{\eta} + \omega^2 \eta^2) dt$.

b) Expandindo η na série de Fourier $\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi t/t_1)$ (por que isso é possível?), mostre que $S[x] = S[x_f] + \frac{mt_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{t_1^2} - \omega^2 \right)$ e conclua que ação é mínima para a trajetória física se $t_1 \leq T/2 = \pi/\omega$.

4. O sistema representado na figura é tal que a massa m_2 se move sem atrito sobre a mesa horizontal e a massa m_1 só pode movimentar-se verticalmente. O fio que une as massas é inextensível. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

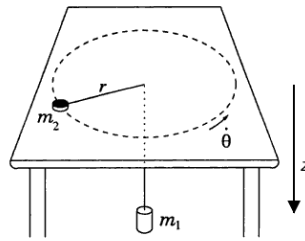
a) Escreva o(s) vínculo(s) e as equações de movimento do sistema,

b) Identifique o significado físico do(s) multiplicador(es) de Lagrange, e mostre que a tensão no fio é dada por

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[g + \frac{p_\theta^2}{m_2^2 r^3} \right],$$

onde p_θ é o valor constante de $m_2 r^2 \dot{\theta}$.

c) Cheque seu resultado verificando a aceleração de queda da massa m_1 no caso particular em que $p_\theta = 0$.



5. Estude o exemplo 2.4.2 do livro, sobre um ‘patinete’ (uma vara rígida horizontal) deslizando sobre o plano. Em seguida, considere novamente a situação do exemplo 1.2.6 (disco vertical rolando sem deslizar sobre o plano).
 - a) Escreva a Lagrangeana deste último sistema (atenção com os momentos de inércia!)
 - b) Este sistema possui vínculos não-holônomos, mas lineares nas velocidades generalizadas (eq. 1.2.10). Use a técnica de multiplicadores de Lagrange para escrever as suas equações de movimento.
 - c) Resolva essas equações e descreva em palavras como é o movimento resultante.
 Dicas: 1) $\phi(t)$ tem uma expressão muito simples! 2) Tente reduzir o problema ao do “patinete”.
6. Uma partícula move-se no potencial gravitacional produzido pelas seguintes distribuições de massa homogêneas: (i) esfera de raio R ; (ii) paralelepípedo infinitamente longo com seção transversal quadrada; (iii) haste de comprimento l ; (iv) disco de raio R ; (v) cilindro infinitamente longo com seção transversal circular; (vi) plano infinito; (vii) plano semi-infinito; (viii) fio enrolado na forma de uma hélice infinita de raio R e passo p . Explique quais são as componentes de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{L}$ (ou combinações delas) que se conservam em cada caso, **justificando passo-a-passo** a conexão dessa conservação com as simetrias dos objetos.
7. Uma partícula de massa m e carga elétrica e move-se num campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$, cujo potencial vetor é $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ (o potencial escalar é nulo). (i) Mostre que as equações de Lagrange para a partícula equivalem a $\dot{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ e determine o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em termos de $\mathbf{B}$. (ii) Exprima a Lagrangeana em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e mostre que, embora ϕ seja coordenada cíclica, a componente $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$ do momento angular *não* é conservada. Explique.
8. Considere um sistema físico 1-dimensional descrito por uma eq. de movimento $m\ddot{x} = F(x, t)$. Vamos estudar como sua Lagrangeana deve ser modificada para se acrescentar ao sistema o efeito de uma força de atrito quadrática $F_{at} = -\gamma\dot{x}^2$, onde γ é constante.
 - a) Mostre que, se $m = \text{constante}$, a nova L deve satisfazer $\Lambda(x) \equiv L_{\dot{x}\dot{x}} = cte. \exp\left[\frac{2\gamma x}{m}\right]$
 - b) Substituindo na solução geral que vimos em sala, obtenha L para os casos em que i) $F = 0$ ou ii) $F = -kx$
9. Considere uma partícula de massa $m = 1$ movendo-se o longo de uma linha reta, submetida apenas a uma força de atrito $F_{at} = -\gamma\dot{x}^2$ como no item 8b(i) acima.
 - (a) Mostre que a conservação da integral de Jacobi h pode nesse caso ser expressa na forma $\dot{x}e^{\gamma x} = C_1$, onde C_1 é uma constante.
 - (b) Prove que a ação é invariante sob a transformação $x' = x + a$, $t' = e^{\beta a}t$ para um certo valor específico de β (determine-o). Interprete geometricamente o significado desta transformação.
 - (c) Considerando a versão infinitesimal da transformação do item anterior, use o teorema de Noether para demonstrar que $(\gamma t\dot{x} - 1)\dot{x}e^{2\gamma x} = C_2 = \text{constante}$.
 - (d) Combinando as duas constantes de movimento para eliminar $\dot{x}$, prove que

$$x(t) = A + \frac{1}{\gamma} \ln(B + \gamma t)$$

e verifique diretamente que esta é de fato a solução da eq. de movimento da partícula.